Questão Discursiva de Matemática

10 de fevereiro de 2022

Um próton de massa m move-se sobre uma reta. A função da energia potencial é dada por:

$$U(x) = \frac{\alpha}{x^2} - \frac{\beta}{x},$$

onde α e β são constantes positivas. O próton é libertado a partir do repouso no ponto $x_0 = \alpha/\beta$.

(a) Mostre que $U(x)$ pode ser escrita do seguinte modo:

$$U(x) = \frac{\alpha}{x_0^2}\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^2 - \frac{x_0}{x}\right].$$

Sabendo que a velocidade do próton é dada por:

$$v(x) = \sqrt{-\frac{2}{m}U(x)}$$

e que a sua energia total $E = K + U$, definida como a soma da energia cinética e potencial se conserva, ou seja:

$$E = K(x) + U(x) = \frac{1}{2}mv^2(x) + U(x).$$

(b) Mostre que a velocidade máxima ocorre quando $x = 2x_0$.

(c) Mostre que o valor da velocidade máxima é $v_{\max} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{2mx_0^2}}$.

Solução:

(a) Uma vez que

$$U(x) = \frac{\alpha}{x^2} - \frac{\beta}{x}$$

e sabendo que $x_0 = \alpha/\beta \Rightarrow \beta = \alpha/x_0$, temos portanto

$$U(x) = \frac{\alpha}{x^2} - \frac{\beta}{x} \Rightarrow U(x) = \frac{\alpha}{x^2} - \frac{\alpha}{x_0 x} \Rightarrow U(x) = \frac{\alpha}{x_0^2}\frac{x_0^2}{x^2} - \frac{\alpha}{x_0 x}$$

$$U(x) = \frac{\alpha}{x_0^2}\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^2 - \left(\frac{x_0}{x}\right)\right]$$

(b) A energia total E do sistema se conserva. Esta energia $E = K + U$ é definida como sendo a soma da energia cinética e potencial. Para que haja máxima velocidade, a energia total E do próton deve ficar armazenada na sua maior parte na energia cinética que depende da velocidade. Neste caso, devemos ter o mínimo de energia potencial $U(x)$ para o próton. Essa condição se estabelece quando,

$$\frac{dU(x)}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left\{\frac{\alpha}{x_0^2}\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^2 - \left(\frac{x_0}{x}\right)\right]\right\} = 0$$

$$\frac{\alpha}{x_0}\left[-2\left(\frac{x_0}{x}\right)^3 + \left(\frac{x_0}{x}\right)^2\right] = 0 \Rightarrow \frac{-2x_0^3 + x x_0^2}{x^3} = 0$$

$$-2x_0^3 + x x_0^2 = 0 \Rightarrow x x_0^2 = 2x_0^3 \Rightarrow x = 2x_0$$

(c) Utilizando a relação $\left[v(x) = \sqrt{-\frac{2}{m}U(x)}\right]$ na condição onde $U(x)$ é mínimo, ou seja, $U(x = 2x_0)$ podemos determinar o valor de $v_{\max}$. Nessa condição obtemos que:

$$U(x) = \frac{\alpha}{x_0^2}\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^2 - \left(\frac{x_0}{x}\right)\right] \Rightarrow U(x = 2x_0) = \frac{\alpha}{x_0^2}\left[\left(\frac{x_0}{2x_0}\right)^2 - \left(\frac{x_0}{2x_0}\right)\right]$$

$$U(x = 2x_0) = \frac{\alpha}{x_0^2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow U(x = 2x_0) = -\frac{\alpha}{4x_0^2}$$

$$v_{\max} = \sqrt{-\frac{2}{m}U(x = 2x_0)} \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{-\frac{2}{m}\left(-\frac{\alpha}{4x_0^2}\right)} \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{\alpha}{2mx_0^2}}$$