Área de Matemática

1) Uma folha de alumínio de comprimento C e largura L será usada para construir tapumes, de altura L, com a finalidade de cercar duas lotes de terreno, sendo o primeiro no formato quadrado e o segundo no formato de um triângulo equilátero. Logo, deseja-se determinar o ponto que essa folha de alumínio deve ser cortada em seu comprimento para que a soma das áreas dos terrenos a serem cercadas seja máxima.

Resposta: A área de um quadrado é o produto da base pela altura, que são iguais, enquanto a área do triângulo equilátero é a metade do produto da base do triângulo por sua altura. Assim, a soma dessas áreas é a função objetivo do problema,

$$A_{\text{total}} = A_{\text{quadrado}} + A_{\text{triângulo}} = a \cdot a + \frac{b \cdot \frac{b \cdot \sqrt{3}}{2}}{2} = a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} b^2$$

sendo a o comprimento de cada lado do quadrado e b o comprimento de cada lado do triângulo.

Sabendo que a folha de alumínio tem comprimento C, então $C = 4a + 3b$, que é uma restrição desse problema. Logo, pode-se verifique que uma variável depende da outra e temos, por exemplo, $a = \dfrac{C - 3b}{4}$.

Substituindo esse valor de a na função objetivo, pode-se obter a área A_{total} como função de uma única variável:

$$\begin{aligned}
A_{\text{total}} = A(b) &= \left[\frac{C - 3b}{4}\right]^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} b^2 \\
&= \frac{C^2 - 6Cb + 9b^2 + 4\sqrt{3}b^2}{16} \\
&= \frac{1}{16}\left[(9 + 4\sqrt{3})b^2 - 6Cb + C^2\right]
\end{aligned}$$

No intuito de determinar o valor de b que maximize essa função para obter a área máxima, deve-se primeiro encontrar o(s) ponto(s) estacionário(s) desta função, derivando esta função tem-se

$$\begin{aligned}
A'(b) &= \frac{1}{16}\left[2(9 + 4\sqrt{3})b - 6C\right] \\
&= \frac{(9 + 4\sqrt{3})b - 3C}{8}
\end{aligned}$$

Fazendo $A'(b) = 0$ tem-se que o único ponto crítico é $\bar{b} = \dfrac{3C}{9+4\sqrt{3}}$. Assim, tem-se que $\bar{a} = \dfrac{1}{4}\left(C - \dfrac{9C}{9+4\sqrt{3}}\right) = \dfrac{\sqrt{3}C}{9+4\sqrt{3}}$. Analisando esse ponto na derivada segunda desta função, tem-se

$$A"(\bar{b}) = A"\left(\frac{3C}{9+4\sqrt{3}}\right) = \frac{9+4\sqrt{3}}{8} \geq 0.$$

Contudo, de acordo com a condição de otimalidade de segunda ordem, este ponto crítico encontrado é um ponto de mínimo, isto é, implica que a soma das áreas será mínima.

Por outro lado, sabe-se que a função $A(b)$ é contínua no intervalo $\left[0, \frac{C}{3}\right]$. Logo, conforme o Teorema de Weiestrass, esta função deve assumir um máximo e um mínimo absolutos no intervalo $\left[0, \frac{C}{3}\right]$. Sabendo que $\bar{b} \in \left[0, \frac{C}{3}\right]$, então a função assume valor mínimo no interior desse intervalo. Logo, o valor máximo deve ser assumido em um dos extremos desse intervalo. Se $b = 0$ e, portanto, $a = \dfrac{C}{4}$, tem-se $A(0) = \left(\dfrac{C}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{16}C^2$, enquanto se $b = \dfrac{C}{3}$ e, portanto, $a = 0$, tem-se $A\left(\frac{C}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{C}{3}\right)^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{36}C^2$.

Sendo $\dfrac{\sqrt{3}}{36}C^2 < \dfrac{1}{16}C^2$, segue-se que a área máxima A ocorre qundo não se corta a folha de alumínio, formando somente um quadrado de lado $a = \dfrac{C}{4}$.